AIII型の量子対称対上の可積分表現の大域的結晶基底について (組合せ論的表現論の諸相)

AUTHOR(S):

渡邉, 英也

CITATION:

渡邉, 英也. AIII型の量子対称対上の可積分表現の大域的結晶基底について (組合せ論的表現論の諸相). 数理解析研究所講究録 2019, 2127: 124-129

ISSUE DATE:

2019-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/252261

数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 124-129

AIII 型の量子対称対上の可積分表現の大域的結晶基底について

東京工業大学　渡邉英也
HIDEYA WATANABE
TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1. 概要

近年，量子対称対の研究が盛んである．特に，AIII/AIV 型と呼ばれる量子対称対は，B/C/D 型のヘッケ代数と Schur 双対性を満たし，ortho-symplectic スーパー・リー代数 $\mathfrak{osp}(m|2n)$ の Bernstein-Gelfand-Gelfand 圏 $\mathcal{O}$ における既約指標を決定する上で中心的な役割を果たす ([BW18a])．ここで鍵になるのが量子群における標準基底を一般化した，量子対称対の $\imath$ 標準基底と呼ばれる概念である ([BW18b] で AIII/AIV 型に限らず一般的な形で定式化された)．

一般に量子対称対はたくさんのパラメータを持つ．先に述べた Schur 双対性や $\imath$ 標準基底といったきれいな理論を得るためには，パラメータをうまく選ばなければならない．筆者は，[W17] において特別なパラメータ (asymptotic) の下で AIII 型の量子対称対の結晶基底 ([W17] では $\jmath$-crystal basis と書いていた) について基本的な結果を得た．これらは，A 型の量子群の通常の結晶基底についての結果の自然な類似であった．

本稿では，asymptotic パラメータの AIII 型の量子対称対の大域的結晶基底という概念を導入し，$\imath$ 標準基底が量子対称対の大域的結晶基底及び結晶基底を用いてより詳しく捉えられることを説明する．

2. 量子対称対

本節では量子対称対を導入する．より詳しくは [Le99], [BW18b] などを参照されたい．量子対称対とは対称対の量子化であり，対称対とは複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその上の対合 θ による固定部分代数 $\mathfrak{g}^\theta$ の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$ のことである．対合 θ の代わりに，$\mathfrak{g}$ の自己同型写像 φ による共役 $\theta' := \varphi \circ \theta \circ \varphi^{-1}$ を考えれば，対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$ と $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\theta'})$ は同型である．このように，$\mathfrak{g}$ の自己同型写像による共役を取ることにより，θ は次のようなものであるとしてよい．すなわち，$\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の頂点集合 I の部分集合 $I_\bullet$ と，I 上の対合 τ 及びパラメータ $(\overline{\varsigma_i})_{i \in I \setminus I_\bullet} \in (\mathbb{C}^\times)^{I \setminus I_\bullet}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
\theta(e_i) &= \begin{cases} e_i & \text{if } i \in I_\bullet, \\ \overline{\varsigma_i} w_\bullet(f_{\tau(i)}) & \text{if } i \in I \setminus I_\bullet, \end{cases} \\
\theta(f_i) &= \begin{cases} f_i & \text{if } i \in I_\bullet, \\ \overline{\varsigma_i}^{-1} w_\bullet(e_{\tau(i)}) & \text{if } i \in I \setminus I_\bullet, \end{cases} \\
\theta(h_i) &= -w_\bullet(h_{\tau(i)})
\end{aligned} \tag{1}
$$

が成り立つ．ただし，e_i, f_i, h_i, $i \in I$ は $\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元で，$w_\bullet$ は $I_\bullet$ に付随する Weyl 群 $W_\bullet$ の最長元である．

注意 2.0.1. 実は上の τ は，各 $i \in I_\bullet$ に対して

$$w_\bullet(h_i) = -h_{\tau(i)}$$

Date: March 26, 2019.

を満たす．特に，式 (1) より，$e_i, f_i, h_i, i \in I_\bullet$ で生成される部分リー代数 $\mathfrak{g}(I_\bullet)$ は $\mathfrak{g}^\theta$ に含まれることがわかる．

次の補題は容易に証明できる．

補題 2.0.2. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$ を上の通りとする．このとき，$\mathfrak{g}^\theta$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g}^\theta)$ は $\{e_j, f_j, h_j, h_i - h_{\tau(i)} \mid j \in I_\bullet,\ i \in I \setminus I_\bullet\}$ と

$$b_i := e_i + \theta(e_{\tau(i)}), \quad i \in I \setminus I_\bullet$$

で生成される．

この説の冒頭で述べた「量子対称対は対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$ の量子化」について説明する．複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の量子化としては Drinfel'd-神保 の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ がある．量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ とは以下の生成元と関係式で定義される $\mathbb{Q}(q)$ 上の結合代数である:

生成元 $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}, i \in I$.

関係式

$$\begin{aligned}
&K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i,\\
&K_i K_j = K_j K_i,\\
&K_i E_j K_i^{-1} = q_i^{a_{i,j}} E_j,\\
&K_i F_j K_i^{-1} = q_i^{-a_{i,j}} F_j,\\
&E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},\\
&E_i^2 E_j - (q_i + q_i^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0, \quad |i-j| = 1,\\
&F_i^2 F_j - (q_i + q_i^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0, \quad |i-j| = 1,\\
&E_i E_j = E_j E_i, \quad |i-j| > 1,\\
&F_i F_j = F_j F_i, \quad |i-j| > 1.
\end{aligned}$$

ここで，$(a_{i,j})_{i,j \in I}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列である．

各 $i \in I \setminus I_\bullet$ に対し，$\varsigma_i \in \mathbb{Q}(q)^\times$ を $\lim_{q \to 1} \varsigma_i = \overline{\varsigma_i}$ なるように選び，

$$B_i := E_i + \varsigma_i T_{w_\bullet}(F_{\tau(i)}) K_i^{-1} \in U_q(\mathfrak{g})$$

とおく．ここで，$T_{w_\bullet}$ は Lusztig の組みひも群作用に関する $w_\bullet$ の作用である．明らかに，古典極限（$q \to 1$）において B_i は $e_i + \overline{\varsigma_i} w_\bullet(f_{\tau(i)})$ に収束する．そこで，$\{E_j, F_j, K_j^{\pm 1}, K_i K_{\tau(i)}^{-1}, B_i \mid j \in I_\bullet,\ i \in I \setminus I_\bullet\}$ で生成される部分代数を $U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ とおけば，これは古典極限において $U(\mathfrak{g}^\theta)$ に収束する．

定義 2.0.3. 組 $(U_q(\mathfrak{g}), U_q'(\mathfrak{g}^\theta))$ を量子対称対と呼ぶ．

注意 2.0.4.

(1) $U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の右余イデアルである．

(2) $\mathfrak{g}^\theta$ は簡約リー代数なので，それに付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g}^\theta)$ が定義されるが，$U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ と $U_q(\mathfrak{g}^\theta)$ は代数として同型ではない．

(3) 対角型と呼ばれる種類の量子対称対を考えると，$U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ として複素半単純リー代数に付随する通常の量子群が現れる．

(4) 近年，量子群における理論（標準基底など）が量子対称対（特に $U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$）の場合に一般化できることが報告されている ([BW18a])．このことを受けて，$U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ は今では $\imath$ 量子群 ($\imath$quantum group) と呼ばれている．“$\imath$” は involution の頭文字に由来する．

以下では $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2r+1}$, $I_\bullet = \emptyset$, $\tau(i) = 2r+1-i$ の場合を考える．このとき，$\mathfrak{g}^\theta$ は簡約リー代数

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_{r+1} \oplus \mathfrak{gl}_r) := \left\{ \begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \mid X \in \mathfrak{gl}_{r+1}, Y \in \mathfrak{gl}_r, \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y) = 0 \right\}$$

に同型である．さらに，新たな不定元 p を用いて量子群の基礎体を 2 変数有理関数体 $\mathbb{Q}(p,q)$ に拡大しておく．量子対称対のパラメータ ς_i を

$$\varsigma_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \neq r, r+1, \\ pq^{-1} & \text{if } i = r, \\ p^{-1} & \text{if } i = r+1 \end{cases}$$

のように選び，$\mathbf{U} = U_q(\mathfrak{sl}_{2r+1})$, $\mathbf{U}^\imath = U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ と書く．

命題 2.0.5 ([BW18a, Lemma 6.1 (3)])**.** $\mathbf{U}^\imath$ は *bar-involution* を持つ．すなわち，$\mathbf{U}^\imath$ 上の $\mathbb{Q}$-代数自己同型写像 $\overline{\cdot}$ で，以下を満たすものが存在する．

$$\overline{B_i} = B_i, \ \overline{K_i K_{\tau(i)}^{-1}} = K_i^{-1} K_{\tau(i)}, \quad i \in I.$$

命題 2.0.6 ([BW18b, Proposition 4.6])**.** 次を満たす $\mathbf{U}$ 上の $\mathbb{Q}(p,q)$-反代数自己同型写像 ρ が存在する．

$$\rho(E_i) = qF_iK_i^{-1}, \ \rho(F_i) = q^{-1}K_iE_i, \ \rho(K_i) = K_i, \ i \in I.$$

また，ρ は $\mathbf{U}^\imath$ を保つ．

3. 結晶基底

いくつか記号を用意する．

- $\mathbf{A} := \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$.
- $\mathbf{A}_0 := \{f \in \mathbb{Q}(p,q) \mid \lim_{q\to 0}(\lim_{p\to 0} f) \neq 0\}$.
- $\mathbf{A}_\infty := \{f \in \mathbb{Q}(p,q) \mid \lim_{q\to \infty}(\lim_{p\to \infty} f) \neq 0\}$.
- $[a] := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$, $a \in \mathbb{Z}$.
- $[a]! := \prod_{b=1}^{a} [b]$.

以下，$\mathbf{U}$-加群とは常にウェイト加群であると仮定する．すなわち，$K_i^{\pm 1}$ は半単純に作用し，その固有値は q^a, $a \in \mathbb{Z}$ の形をしているとする．同様に，$\mathbf{U}^\imath$-加群とは $K_iK_{\tau(i)}^{-1}$ が半単純に作用し，その固有値は q^a, $a \in \mathbb{Z}$ の形をしていると仮定する．

$i \in I$ を固定する．$E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$ で生成される $\mathbf{U}$ の部分代数 $\mathbf{U}_i$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ に同型である．したがって，有限次元 $\mathbf{U}_i$-加群は完全可約であり，有限次元既約表現は非負整数で分類される．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対応する既約表現 $L(n)$ は $n+1$ 次元で，$E_iv = 0$, $K_iv = q^n v$ なる $0 \neq v \in L(n)$ がスカラー倍を除いてただ一つ存在して $L(n) = \bigoplus_{m=0}^{n} F_i^{(m)} v$ を満たす．ここで，$F_i^{(m)} := \frac{1}{[m]!} F_i^m$ である．$L(n)$ 上の線形自己準同型写像 $\tilde{E}_i$, $\tilde{F}_i$ を

$$\tilde{E}_i(F_i^{(m)} v) := F_i^{(m-1)} v, \quad \tilde{F}_i(F_i^{(m)} v) := F_i^{(m+1)} v$$

で定義する．有限次元 $\mathbf{U}_i$-加群の完全可約性から，$\tilde{E}_i, \tilde{F}_i$ は任意の有限次元 $\mathbf{U}_i$-加群上の線形自己準同型写像を定める．これらを柏原作用素と呼ぶ．

定義 3.0.1. M を有限次元 $\mathbf{U}$-加群とする．M の結晶基底とは組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ で以下を満たすもののことである．

- $\mathcal{L}$ は M の自由 $\mathbf{A}_0$-加群で，$\mathbb{Q}(p,q) \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L} = M$ となる．

- $\mathcal{L}$ は柏原作用素で閉じている．したがって，柏原作用素は $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ 上の線形自己準同型写像を誘導する (これらも柏原作用素と呼び，同じ記号で記す)．
- $\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底である．
- $\mathcal{B} \sqcup 0$ は柏原作用素で閉じている．
- $b, b' \in \mathcal{B}, i \in I$ に対し，$\tilde{E}_i b = b'$ であることと $b = \tilde{F}_i b'$ であることは同値である．

さて，有限次元 $\mathbf{U}$-加群は完全可約であり，有限次元既約表現は分割 (partition) で分類されることが知られている．すなわち，

$$\mathrm{Par} := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2r+1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2r+1} \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{2r+1} = 0\}$$

とおくと，有限次元既約 $\mathbf{U}$-加群の同値類の集合と Par の間には自然な一対一対応がある．$\lambda \in \mathrm{Par}$ に対応する既約 $\mathbf{U}$-加群を $L(\lambda)$ と書く．

事実 3.0.2. $\lambda \in \mathrm{Par}$ とする．$L(\lambda)$ は同型を除きただ一つの結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ を持つ．さらに，$\mathcal{B}(\lambda)$ は，型 λ，文字 $\{1, \dots, 2r+1\}$ の半標準盤全体の集合 $\mathrm{SST}(\lambda)$ と自然な一対一対応を持つ．

ここまで，量子群 $\mathbf{U}$ の結晶基底についてよく知られた事実を述べてきたが，同様のことが $\imath$ 量子群 $\mathbf{U}^\imath$ でも成り立つ ([W17])．すなわち，有限次元 $\mathbf{U}^\imath$-加群は完全可約であり，有限次元既約 $\mathbf{U}^\imath$-加群は

$$\mathrm{BiPar} := \{(\lambda^-; \lambda^+) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{r+1} \times (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r \mid \lambda_1^- \geq \cdots \geq \lambda_{r+1}^-,\ \lambda_1^+ \geq \cdots \lambda_r^+,\ \lambda_{r+1}^- \lambda_r^+ = 0\}$$

で分類され，$(\lambda^-; \lambda^+) \in \mathrm{BiPar}$ に対応する既約 $\mathbf{U}^\imath$-加群 $L(\lambda^-; \lambda^+)$ は同型を除いてただ一つの結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda^-; \lambda^+), \mathcal{B}(\lambda^-; \lambda^+))$ を持ち，$\mathcal{B}(\lambda^-; \lambda^+)$ は，型 $(\lambda^-; \lambda^+)$, 文字 $\{0, -1, \dots, -r\} \times \{1, \dots, r\}$ の半標準盤全体の集合 $\mathrm{SST}(\lambda^-; \lambda^+)$ と自然な一対一対応を持つ．

4. 大域的結晶基底

再び量子群 $\mathbf{U}$ の設定に戻る．$\mathbf{U}$ の bar-involution とは，

$$E_i \mapsto E_i,\ F_i \mapsto F_i,\ K_i \mapsto K_i^{-1},\ q \mapsto q^{-1},\ p \mapsto p^{-1}$$

で定義される $\mathbb{Q}$-代数自己同型写像 $\overline{\cdot} : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ である．また，$\mathbf{U}$-加群 M の bar-involution とは，

$$\overline{x \cdot m} = \overline{x} \cdot \overline{m}, \quad x \in \mathbf{U}, m \in M$$

を満たす $\mathbb{Q}$-線形自己同型写像 $\overline{\cdot} : M \to M$ である．

$E_i^{(n)}, F_i^{(n)}, K_i^{\pm 1}, i \in I, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で生成される $\mathbf{A}$-部分代数を $\mathbf{U}_\mathbf{A}$ と書く．

定義 4.0.1. 有限次元 $\mathbf{U}$-加群 M が結晶基底 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ を持つとする．M が大域的結晶基底を持つとは，$\mathbf{A}$-部分加群 $M_\mathbf{A}$ と bar-involution が存在して以下を満たすことである．

(1) $\mathbb{Q}(p, q) \otimes_\mathbf{A} M_\mathbf{A} = M$.
(2) $M_\mathbf{A}$ は $\mathbf{U}_\mathbf{A}$ の作用で閉じている．
(3) 自然な $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{L} \cap M_\mathbf{A} \cap \overline{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}/q\mathcal{L};\ m \mapsto m + q\mathcal{L}$ は線形同型である．

このとき，条件 (3) の同型写像による $\mathcal{B}$ の逆像を $G(\mathcal{B})$ と書き，M（および $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$）の大域的結晶基底（global crystal basis）と呼ぶ．

注意 4.0.2.

(1) 結晶基底は $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ の基底であって M の基底ではないが，大域的結晶基底は本当に M の基底である．
(2) 結晶基底及び大域的結晶基底は柏原によって導入されたが，これは同時期に別の手法で Lusztig によって導入された標準基底（canonical basis）と同じものであるということが後に証明された．本稿では組合せ論的側面を強調するために前者の定式化を選んだ．

$\lambda \in \mathrm{Par}$ をとり，対応する有限次元既約 $\mathbf{U}$-加群 $L(\lambda)$ を考える．これはただ一つの結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ を持っていたことを思い出そう．$L(\lambda)$ は，この結晶基底に関して大域的結晶基底 $G(\lambda) := G(\mathcal{B}(\lambda))$ を持つことが知られている．

$\imath$ 量子群の設定でも bar-involution $\overline{\cdot}$, $\mathbf{A}$-部分代数 $\mathbf{U}^\imath_{\mathbf{A}}$, 大域的結晶基底などの概念が定義でき，次が成り立つ．

定理 4.0.3 ([W18, Theorem 8.2.4])**.** $(\lambda^-;\lambda^+) \in \mathrm{BiPar}$ とし，$v \in L(\lambda^-;\lambda^+)$ を最高ウェイトベクトルとする．$L(\lambda^-;\lambda^+)$ の *bar-involution* $\overline{\cdot}$ と双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ を

$$\begin{aligned}
&\overline{v} = v,\\
&(v,v) = 1,\\
&(xm,n) = (m,\rho(x)n), \quad x \in \mathbf{U}^\imath,\ m,n \in L(\lambda^-;\lambda^+)
\end{aligned}$$

で定める．このとき，$L(\lambda^-;\lambda^+)$ の基底 $G(\lambda^-;\lambda^+) = \{G(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda^-;\lambda^+)\}$ で，次を満たすものが存在する．

(1) 任意の $b \in \mathcal{B}(\lambda^-;\lambda^+)$ に対し，$\overline{G(b)} = G(b)$.
(2) 任意の $b \in \mathcal{B}(\lambda^-;\lambda^+)$ に対し，$G(b) + q\mathcal{L}(\lambda^-;\lambda^+) = b$
(3) $\mathcal{L}(\lambda^-;\lambda^+) = \{m \in L(\lambda^-;\lambda^+) \mid (m,m) \in \mathbf{A}_0\}$.
(4) $G(\lambda^-;\lambda^+)$ が張る $\mathbf{A}$-部分加群は $\mathbf{U}^\imath_{\mathbf{A}}$ の作用で閉じている．
(5) $G(\lambda^-;\lambda^+)$ は双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ に関する概正規直交基底である．すなわち，任意の $b, b' \in \mathcal{B}(\lambda^-;\lambda^+)$ に対して
$$(G(b), G(b')) \in \delta_{b,b'} + q\mathbf{A}_0$$
が成り立つ．
(6) $\mathcal{B}(\lambda^-;\lambda^+)$ は双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ から誘導される $\mathcal{L}(\lambda^-;\lambda^+)/q\mathcal{L}(\lambda^-;\lambda^+)$ 上の双線形形式に関する正規直交基底である．

特に，$G(\lambda^-;\lambda^+)$ は $L(\lambda^-;\lambda^+)$ の大域的結晶基底である．

この定理の証明は，量子群の場合と異なり，B 型の Schur 双対性及び B 型の asymptotic parameter における Hecke 環の表現論を用いる．このように Hecke 環を経由することなく，$\imath$ 量子群あるいは量子対称対の世界だけで大域的結晶基底の理論を構築することが今後の課題である．

5. $\imath$ 標準基底と大域的結晶基底

以下，混同の恐れがあるときは量子対称対の表現の大域的結晶基底のことを「大域的 $\imath$ 結晶基底」と書くことにする．容易にわかることだが，$\imath$ 標準基底は大域的 $\imath$ 結晶基底である ([W18, Proposition 5.3.4])．しかし，$\imath$ 標準基底は有限次元既約 $\mathbf{U}$-加群 $L(\lambda)$ の基底であり，$L(\lambda)$ は一般には $\mathbf{U}^\imath$-加群として既約ではないため，前節の議論だけでは $\imath$ 標準基底を捉えることはできない．そこで，既約とは限らない $\mathbf{U}^\imath$-加群が大域的 $\imath$ 結晶基底を持つとき，その構造を調べる必要がある．

まず，量子群の場合を思い出そう．有限次元既約 $\mathbf{U}$-加群 $L(\lambda)$ はただ一つの大域的結晶基底を持つが，既約ではない $\mathbf{U}$-加群は複数の大域的結晶基底を持ち得る．M を有限次元 $\mathbf{U}$-加群，$(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ を結晶基底，$G(\mathcal{B})$ を大域的結晶基底とする．M は半単純なので，

$$M = \bigoplus_{i=1}^{l} M_i, \quad M_i \simeq L(\lambda_i), \quad \lambda_i \in \mathrm{Par}$$

と既約分解される．これに伴って，$\mathcal{B}$ も

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{l} \mathcal{B}_i, \quad \mathcal{B}_i \simeq \mathcal{B}(\lambda_i)$$

と分解される．$b \in \mathcal{B}_i$ のとき，$I(b) = \lambda_i$ と書く．$\lambda \in \mathrm{Par}$ に対し，

$$I_\lambda(M) = \bigoplus_{\substack{i=1,\dots,l \\ \lambda_i = \lambda}} M_i$$

とおく．さらに

$$\begin{aligned} W_{\geq\lambda}(M) &:= \sum_{\mu\geq\lambda} I_\mu(M), \\ W_{>\lambda}(M) &:= \sum_{\mu>\lambda} I_\mu(M), \\ W_\lambda(M) &:= W_{\geq\lambda}(M)/W_{>\lambda} \end{aligned}$$

とおく．ここで，$\geq$ は Par 上の支配的順序 (dominance order) である．このとき，$W_\lambda(M)$ は $\{G(b)+W_{\geq\lambda}(M) \mid b \in \mathcal{B},\ I(b) = \lambda\}$ を大域的結晶基底に持ち，ある同型写像 $W_\lambda(M) \to L(\lambda)^{\oplus m_\lambda}$ によって大域的結晶基底は $G(\lambda)^{\oplus m_\lambda}$ に写る (m_λ は M における $L(\lambda)$ の重複度)．

これと同様のことが，$\imath$ 標準基底について成り立つ．

定理 5.0.1 ([W18, Theorem 9.3.6])**.** $\lambda \in \mathrm{Par}$ をとり，$G(\lambda)^\imath = \{G(b)^\imath \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$ を $L(\lambda)$ の $\imath$ 標準基底とする．このとき，$(\lambda^-;\lambda^+) \in \mathrm{BiPar}$ に対し，$W_{(\lambda^-;\lambda^+)}(L(\lambda))$ は $\{G(b)^\imath + W_{\geq(\lambda^-;\lambda^+)}(L(\lambda)) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda),\ I(b) = (\lambda^-;\lambda^+)\}$ を大域的結晶基底に持ち，ある同型写像 $W_{(\lambda^-;\lambda^+)}(L(\lambda)) \to L(\lambda^-;\lambda^+)^{\oplus m_{(\lambda^-;\lambda^+)}}$ によって大域的結晶基底は $G(\lambda^-;\lambda^+)^{\oplus m_{(\lambda^-;\lambda^+)}}$ に写る *(*$m_{(\lambda^-;\lambda^+)}$ は $L(\lambda)$ における $L(\lambda^-;\lambda^+)$ の重複度*)*.

謝辞

最後に，研究集会 “組合せ論的表現論の諸相” の開催にご尽力くださり，筆者に講演の機会を与えてくださった佐垣先生に感謝の意を表します．

References

[BW18a] H. Bao and W. Wang, A new approach to Kazhdan-Lusztig theory of type B via quantum symmetric pairs, Astérisque 402 (2018), 134pp.

[BW18b] H. Bao and W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs, Invent. Math. 213 (2018), no. 3, 1099–1177.

[Le99] G. Letzter, Symmetric pairs for quantized enveloping algebras, J. Algebra 220 (1999), no. 2, 729–767.

[L93] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010. xiv+346 pp.

[W17] H. Watanabe, Crystal basis theory for a quantum symmetric pair $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^\jmath)$, to appear in Int. Math. Res. Not., arXiv:1704.01277.

[W18] H. Watanabe, Global crystal bases for integrable modules over a quantum symmetric pair of type AIII, arXiv:1809.08577v2.

Email address: `watanabe.h.at@m.titech.ac.jp`